



325E

کد کنترل

325

E

دفترچه شماره (۱)  
صبح جمعه  
۹۸/۱۲/۹



جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»  
امام خمینی (ره)

## آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌تمکن) - سال ۱۳۹۹

### رشته مهندسی صنایع - کد (۲۳۵۰)

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی  | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|---|------------|----------|----------|
| ۱    | مجموعه دروس تخصصی: تحقیق در عملیات (۱و۲) – تئوری احتمالات و آمار مهندسی – طراحی سیستم‌های صنعتی | ۴۵         | ۱        | ۴۵       |

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تعلیمی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با مخالفین برای مقرورات رفتار می‌شود.

۱۳۹۹

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، بهمنزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سوالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سوالات و پائین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

- ۱ برای ماتریس  $A$  با کدام ویژگی، لزوماً بردار  $x$  ای وجود ندارد که به ازای آن فاصله اقلیدسی بردار  $Ax$  از بردار  $b$  مساوی صفر شود؟

$$|AA^T| = |A^TA| = 0 \quad (1)$$

$\wedge$  معکوس پذیر باشد.

(۳)  $A$  دارای رتبه ستونی کامل و  $|AA^T| = 0$  باشد.

(۴)  $A$  دارای رتبه سطری کامل باشد ولی معکوس پذیر نباشد.

- ۲ در یک اورژانس شبانه‌روزی، حداقل تعداد کارکنان مورد نیاز در هر یک از ۶ بازه ۴ ساعتی ۶-۱۰، ۱۰-۱۴، ۱۴-۱۸، ۱۸-۲۲ و ۲۲-۲۴ در طی یک شب‌نیاز با توجه به داده‌های تاریخی تخمین زده شده است. هر کارکن تنها باید ۸ ساعت متولی در روز کار کند. در صورتی که به دنبال تعیین کمترین تعداد کارکنان مورد نیاز با استفاده از برنامه‌ریزی خطی باشیم، مدل حاصل چند محدودیت اصلی (غیر از محدودیت‌های دامنه متغیرها) خواهد داشت؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

- ۳ یک مسئله سرمایه‌گذاری در قالب زیر مدل شده است:

$$\max z = 2/x_1 + 1/5x_2 + 1/15x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 23/5x_1 + 25x_2 + 17/5x_3 \leq 780$$

$$x_1 + 0/8x_2 + 1/5x_3 \leq 40$$

که در آن هر سه متغیر، عدد صحیح نامنفی هستند. چنانچه بخواهیم متغیر  $x_2$  را براساس متغیرهای صفر و یک بیان کنیم، حداقل چه تعداد متغیر نیاز است؟

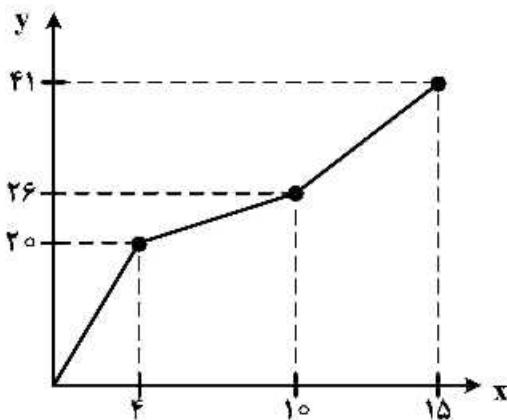
(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

- ۴ همان‌طور که در نمودار زیر نمایش داده شده است، کمیت  $y$  تابعی از متغیر مستقل  $x$  است. به منظور مدل‌سازی خطی این رابطه، متغیر  $x$  را به صورت  $d_1 + d_2 + d_3$  می‌توان نوشت که در این صورت رابطه خطی  $y = 5d_1 + d_2 + 3d_3$  را خواهیم داشت. کدام دسته از محدودیت‌ها برای تکمیل مدل‌سازی لازم است؟ ( $w_1, w_2 \in \{0, 1\}$ )



$$\begin{aligned} 4w_1 &\leq d_1 \leq 4 \\ 6w_2 &\leq d_2 \leq 6 \\ 0 &\leq d_3 \leq 5w_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 4w_1 &\leq d_1 \leq 4w_1 \\ 6w_2 &\leq d_2 \leq 6 \\ 0 &\leq d_3 \leq 5 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_1 \leq 4w_1 \\ 6w_2 &\leq d_2 \leq 6w_2 \\ 0 &\leq d_3 \leq 5w_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 4w_1 &\leq d_1 \leq 4 \\ 6w_2 &\leq d_2 \leq 6w_1 \\ 0 &\leq d_3 \leq 5w_2 \end{aligned} \quad (4)$$

- ۵ مدل بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{s.t. } \|x\|_p &\leq 1 \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

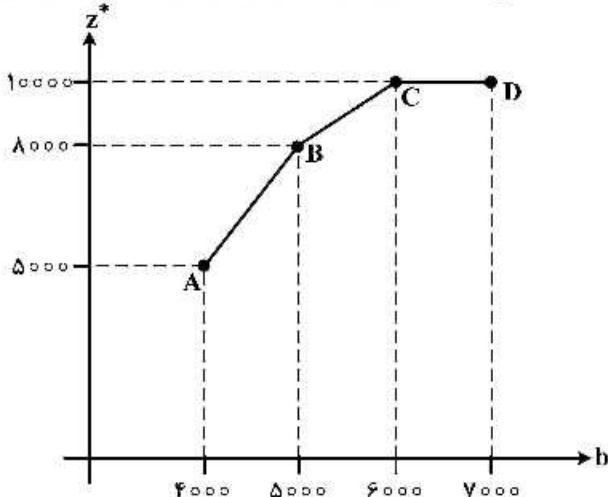
که در آن تمامی  $c_{ii}, c_1, \dots, c_n$  غیر صفر و  $\|x\|_p$  برای هر  $p > 0$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

اگر  $z^*(p)$  مقدار بهینه مدل فوق باشد، آنگاه این کمیت نسبت به  $p$  تابعی ..... است.

- (۱) نزولی  
 (۲) صعودی  
 (۳) اکیداً نزولی  
 (۴) اکیداً صعودی

۶ در یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف  $b$  مقدار تغییرات مقدار بهینه تابع هدف  $z^*$  بر حسب مقدار سمت راست یک محدودیت نامساوی که آن را  $b$  می‌نامیم، به صورت زیر نمایش داده شده است. قیمت سایه‌ای (shadow price) این محدودیت در بازه  $A$  تا  $D$  تابعی ..... بوده و مقدار آن در بازه  $B$  تا  $C$  برابر است.



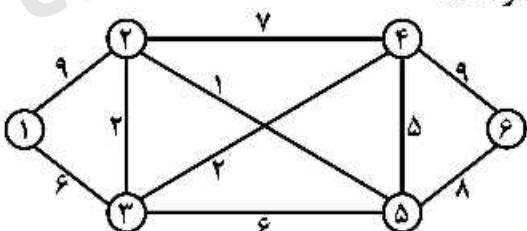
- (۱) غیرنژولی ، ۳
- (۲) غیرنژولی ، ۲۰۰۰
- (۳) غیرصعودی ، ۲
- (۴) غیرصعودی ، ۲۰۰۰

۷ جدول سیمپلکس مرتبط با یک مدل برنامه‌ریزی خطی بیشینه‌سازی با تابع هدف  $z = bx_1 + x_2 + 4x_3$  به صورت زیر است. جواب  $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2$  متناظر با این جدول چه وضعیتی دارد؟

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | RHS |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| ۳     | ۱۰    |       | ۱     |       | ۰   |
| ۰/۸   | -۰/۲۵ |       |       |       | ۴   |
| $z$   | ۹     | a     | ۰     | ۰     | ۱۶  |

- (۱) بهینه غیرتابه‌یده
- (۲) بهینه غیریکتا
- (۳) بهینه تابه‌یده
- (۴) غیربهینه تابه‌یده

۸ در شبکه زیر، گره‌ها نشان‌دهنده روستاهای یک منطقه جغرافیایی است و اعداد روی یال‌ها هزینه احداث جاده بین دو روستا (در صورت امکان) را نشان می‌دهد. هدف برقراری راه ارتباطی به صورت مستقیم یا غیرمستقیم بین تمام روستاهاست. حداقل سرمایه‌گذاری لازم برای این پروژه چقدر است؟



- (۱) ۲۳
- (۲) ۲۱
- (۳) ۱۹
- (۴) ۱۶

چه تعداد از توابع زیر همواره محدب هستند؟

$$e^{ax} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x^{-a} \quad (a < 0) \quad x > 0$$

$$|x|^a \quad (a > 0) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x \log x \quad x > 0$$

$$\log x \quad x > 0$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

- ۱۰ در یک مسئله حمل و نقل که هزینه‌های ارسال کالا و سایر اطلاعات در جدول زیر داده شده است، به ازای چه مقادیری از  $\lambda$  جواب حاصل از روش گوشش شمال غربی بهینه است؟

| مبدأ \ مقصد | ۱             | ۲  | ۳  | عرضه |                        |
|-------------|---------------|----|----|------|------------------------|
| ۱           | $5 - \lambda$ | ۱۱ | ۹  | ۱۰   | $\lambda \leq 5$ (۱)   |
| ۲           | ۱۳            | ۷  | ۳  | ۲۰   | $\lambda \leq 8$ (۲)   |
| ۳           | ۲۱            | ۱۴ | ۶  | ۳۰   | $\lambda \geq -18$ (۳) |
| تacula      | ۲۵            | ۱۵ | ۲۰ |      | $\lambda \geq -12$ (۴) |

- ۱۱ اگر ماتریس  $A$  معین مثبت باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟
- $A^k$  عدد طبیعی دلخواه معین مثبت است.
  - ماتریس  $B$  وجود دارد که  $A = B^T B$  است.
  - به ازای هر بردار  $x$   $x^T \Lambda x$  معین مثبت است.
  - بزرگترین درایه در هر سطر، روی فطر اصلی قرار دارد.

- ۱۲ در یک شرکت رنگ‌سازی هزینه آماده‌سازی دستگاه برای تهیه یک رنگ، بستگی به رنگ ساخته شده قبلی توسط آن دستگاه دارد. کمترین هزینه برای ساخت سه رنگ سیاه، قرمز و سفید چقدر است؟

| رنگ ساخت        | رنگ ساخته شده قبلی |        |
|-----------------|--------------------|--------|
| رنگ سیاه        | هیچ‌کدام           | ۲۹ (۱) |
| رنگ قرمز        | سیاه               | ۳۲ (۲) |
| رنگ سفید        | قرمز               | ۳۰ (۳) |
| رنگ سیاه و قرمز | سفید               | ۲۷ (۴) |
| رنگ سیاه و سفید | سیاه و قرمز        |        |
| رنگ سفید و قرمز | سیاه و سفید        |        |
|                 | قرمز و سفید        |        |

- ۱۳ در کمینه‌سازی تابع  $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$  با استفاده از روش گرادیان در یک تکرار در صورت شروع از نقطه  $T(2, 3)$ ، چه میزان تابع هدف بهبود می‌یابد؟
- ۴ (۱)
  - ۶ (۲)
  - ۸ (۳)
  - ۱۲ (۴)

- ۱۴ - فرض کنید  $Z^*$  مقدار بهینه مدل زیر است:

$$P \quad \min z = f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in S$$

که در آن  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $w_k^*$  برای  $k = 1, \dots, n-1$  مقادیر بهینه مدل‌های زیر هستند:

$$L_k \quad \min w_k = x_k \\ (k \geq 2) \quad \text{s.t. } x \in S$$

$$L_1 \quad \min w_1 = x_1 \\ \text{s.t. } x \in S$$

$$f(x) = z^*$$

$$f(x) = z^*$$

$$x_1 = w_1^*, \dots, x_{k-1} = w_{k-1}^*$$

آنگاه:

(۱) هر جواب بهینه مدل  $P$  برای همه مدل‌های  $L_k$  بهینه است.

(۲) هر جواب بهینه مدل  $P$  برای همه مدل‌های  $L_k$  لزوماً بهینه نیست.

(۳) جواب‌های بهینه مدل‌های  $P$  و  $L_k$  با هم همپوشانی ندارند.

(۴) هر جواب بهینه مدل  $P$ ، حداقل برای یکی از  $L_k$  بهینه است.

- ۱۵ - مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} x_j \leq d_i \quad i = m+1, \dots, q$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

فرض کنید  $y_i$  متغیر دوگان نظیر محدودیت  $i = 1, \dots, m$  و  $w_i$  متغیر دوگان نظیر محدودیت  $i = m+1, \dots, q$

باشد. همچنین در نظر بگیرید،  $x^*$  یک جواب بهینه برای مدل فوق است و  $y_i^*$  و  $w_i^*$  جواب‌های بهینه دوگان

متناظر هستند. برای کدام  $c'_j$ ، جواب  $x^*$  برای مدل زیر بهینه باقی می‌ماند؟

$$\max z = \sum_{j=1}^n c'_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

$$c'_j = c_j - \sum_{i=m+1}^q e_{ij} w_i^* \quad (۱)$$

$$c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \quad (۲)$$

$$c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* + \sum_{i=m+1}^q e_{ij} w_i^* \quad (۳)$$

$$c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - \sum_{i=m+1}^q e_{ij} w_i^* \quad (۴)$$

۱۶- برای داده‌های  $8, 10, 6, 8, 5, 8, 4, 8, 3, 4$ ، میانگین قدر مطلق انحراف‌ها از میانه کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{2}{9}$
- (۴)  $\frac{5}{9}$

۱۷- ۶ نفر به ترتیب وارد یک آتاق می‌شوند. احتمال اینکه فرد  $a$  بعد از فرد  $b$  (و نه حتماً بلافصله) وارد شود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{4}$
- (۴)  $\frac{1}{6}$

۱۸- از ظرفی شامل ۴ توپ قرمز، ۲ توپ سفید و ۲ توپ آبی، ۴ توپ به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که از هر رنگ حداقل یک توپ انتخاب شود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{8}$
- (۲)  $\frac{4}{7}$
- (۳)  $\frac{1}{22}$
- (۴)  $\frac{5}{22}$

۱۹- روی ۱۰ کارت اعداد ۱ تا ۱۵ نوشته شده و در یک ردیف و به تصادف چیده می‌شوند. به‌طور متوسط چند کارت حاوی اعداد زوج در جای خود قرار می‌گیرند؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{8}{20}$
- (۳)  $\frac{9}{20}$
- (۴)  $\frac{11}{20}$

۲۰- فرض کنید واریانس  $2 - X$  مساوی ۵ و متوسط (میانگین)  $2 + \frac{1}{3}X + X + 1 = X^2$  کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۶

- ۲۱- یک پرنسپال  $Y$  تا تخم می‌گذارد. فرض کنید  $p(\lambda) \sim Y$  هر تخم با احتمال  $p$  به یک جوجه زنده منجر می‌شود. اگر  $X$  تا از جوجه‌ها زنده بمانند، میانگین  $X$  کدام است؟

$\lambda$  (۱)

$\lambda p$  (۲)

$\lambda + p$  (۳)

$\frac{\lambda p}{2}$  (۴)

- ۲۲- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع توزیع زیر است. مقدار  $E(X)$  کدام است؟

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{x+3}{4} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$\frac{15}{16}$  (۱)

$\frac{7}{16}$  (۱)

$\frac{23}{16}$  (۲)

$\frac{27}{16}$  (۳)

- ۲۳- فرض کنید  $(X, Y)$  یک متغیر تصادفی نرمال با اطلاعات  $(\mu, \sigma^2)$  باشد. مقدار  $P(X + Y > 5)$  کدام است؟ ( $\Phi(\cdot)$  نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است).

$\Phi(\circ/\delta)$  (۱)

$1 - \Phi(\circ)$  (۲)

$2\Phi(\circ) - 1$  (۳)

$\frac{1}{2}(1 - \Phi(\circ))$  (۴)

- ۲۴- فرض کنید متغیرهای تصادفی  $(X, Y)$  داده شده‌اند؛ به طوری که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$P\{Y > 2\} = P\{X > 62/79\} = 0.1$$

مقدار  $P\left\{\frac{1}{X} < 4\right\}$  کدام است؟

$0/975$  (۱)

$0/99$  (۲)

$0/95$  (۳)

$0/75$  (۴)

- ۲۵ - فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $\text{Beta}(\theta, 1)$  با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر

$$F_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0$$

ماکریم درستنمایی  $\frac{1}{\theta}$ , کدام است؟

$$\frac{1}{n} \ln(\sum_{i=1}^n X_i) \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (2)$$

$$-\frac{1}{n} \ln(\sum_{i=1}^n X_i) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (4)$$

- ۲۶ - تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر است. مقدار  $p(X+Y \leq 1 | X \leq \frac{1}{2})$  کدام است؟

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

- ۲۷ - فرض کنید  $(X \sim U(0, \theta))$  یک بازه اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\theta$  باشد. مقدار  $k$  کدام است؟

$$\frac{1}{\alpha} \quad (1)$$

$$\alpha \quad (2)$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \quad (3)$$

$$1-\alpha \quad (4)$$

- ۲۸ - یافته‌های زیر، خلاصه اطلاعات به دست آمده از دو نمونه تصادفی مستقل از دو جمعیت نرمال با واریانس‌های بیکسان هستند. برای آزمون برابری میانگین‌ها، مقدار آماره آزمون کدام است؟

$$n = 21, \bar{x} = 33, s_1 = 5$$

$$m = 26, \bar{y} = 35, s_2 = 4$$

$$\sqrt{\frac{15 \times 31}{7 \times 26}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{15 \times 21}{8 \times 26}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{21 \times 31}{5 \times 26}} \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{5 \times 31}{7 \times 26}} \quad (3)$$

۲۹- فرض کنید  $(H_1 : p = \frac{2}{3})$  باشد. برای آزمون  $X \sim \text{Bin}(5, p)$ ، اگر ناحیه بحرانی به فرم  $x = 4$  و  $X \geq k$  مساهده شود، مقدار  $p$ -value (p-value) آزمون کدام است؟

$$\frac{11}{81} \quad (1)$$

$$\frac{32}{81} \quad (2)$$

$$\frac{11}{243} \quad (3)$$

$$\frac{32}{243} \quad (4)$$

۳۰- در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, 10$ ، مقدار آماره آزمون از جدول آنالیز واریانس مدل برابر ۴ به دست آمده است. ضریب تعیین کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

۳۱- ۵ نقطه تقاضا با وزن یکسان در شهر وجود دارد. می‌خواهیم یک مکان سرویس برای امداد جایابی کنیم. (با فرض فاصله مختصاتی) مکان بهینه کدام است؟ در صورتی که مختصات نقاط تقاضا به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} p_1 = (3, 2) & w_1 = 1 \\ p_2 = (6, 2) & w_2 = 1 \\ p_3 = (4, 4) & w_3 = 1 \\ p_4 = (8, 1) & w_4 = 1 \\ p_5 = (5, 7) & w_5 = 1 \end{cases}$$

۲) جواب مسئله یک سطح مریع یا مستطیل است.

۴) جواب مسئله یک نقطه است.

۱) جواب مسئله یک پاره خط است.

۳) جواب مسئله یک خط است.

۳۲ - قرار است ۳ تسهیل جدید که با یکدیگر در ارتباطند بین تسهیلات موجود مستقر شوند. اگر  $x$  بیانگر محل قرارگیری مختصه  $x$  تسهیل جدید  $j$  ام باشد وتابع هدف مسئله با در نظر گرفتن فاصله متعامد به صورت زیر نوشته شود:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5|x_1| + 3|x_1 - 4| + |x_2 - 3| + 6|x_2 - 6| + 2|x_2 - 10| \\ + 2|x_3| + 3|x_3 - 10| + 4|x_1 - x_2| + 3|x_2 - x_3|$$

در صورتی که مختصه  $x$  تسهیلات جدید ۱ و ۳ به ترتیب بر روی ۳ و ۴ قرار گیرد ( $x_1 = 3, x_3 = 4$ )، آنگاه مقدار بیانه  $x$  کدام گزینه است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۵
- (۳) ۸
- (۴) ۱۰

۳۳ - تابع هدف و محدودیت‌های مدل ریاضی ABSMODEL که به منظور فرموله کردن مسئله طراحی استقرار تک ردیفه استفاده می‌شود، به صورت زیر است:

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} f_{ij} |x_i - x_j|$$

$$\text{s.t.: } |x_i - x_j| \geq \delta(l_i + l_j) + d_{ij}, \forall i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$$

در یک مسئله‌ای با  $n$  تسهیل جدید، حداقل تعداد متغیرهای تصمیم و محدودیت‌های مسئله LMIP I کدام گزینه است؟

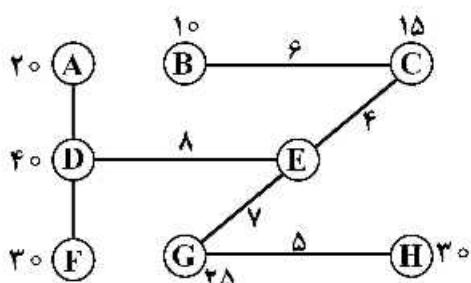
$$\binom{n}{2}, n$$

$$\binom{n}{2}, (n+2)\binom{n}{2}$$

$$2\binom{n}{2}, n+\binom{n}{2}$$

$$3\binom{n}{2}, (n+2)\binom{n}{2}$$

۳۴ - در شبکه داده شده زیر، تقاضای گره E چند درصد تقاضای گره D باشد تا مسئله ۱-median، جواب بیانه چندگانه داشته باشد؟



- %10 (۱)
- %25 (۲)
- %50 (۳)
- %100 (۴)

- ۳۵ چنانچه در یک مسئله پوشش کامل مجموعه، ماتریس ضرایب به صورت زیر باشد، آنگاه با اعمال قواعد کاهش سطر و ستون جهت ساده‌سازی و حل مدل، ماتریس کاهش یافته چند در چند خواهد بود؟

|   | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| B | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| C | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| D | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| E | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

۵ × ۵ (۴)

۴ × ۴ (۳)

۳ × ۳ (۲)

۲ × ۲ (۱)

- ۳۶ با یک مدل جابه‌جایی تکی در حالت مجذور فاصله مستقیم (مجذور فاصله اقلیدسی) روبرو هستیم. محل بهینه استقرار ماشین جدید  $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$  به دست آمده است. با توجه به وزن برابر بین ماشین جدید و ۳ ماشین موجود،

$x_3$  و  $y_3$  برابر با کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ اگر ۳ ماشین موجود در نقاط:

$$P_1 = (2, 4), P_2 = (x_2, 4), P_3 = (2, y_2)$$

مستقر باشند.

$$y_2 = 1, x_2 = 1 \quad (2)$$

$$y_2 = 0, x_2 = 0 \quad (1)$$

$$y_2 = 4, x_2 = 2 \quad (4)$$

$$y_2 = 0, x_2 = \frac{1}{2} \quad (3)$$

- ۳۷ به ترتیب با و بدون در نظر گرفتن خاصیت حکیمی (بهینگی بر روی گره) در حل یک مسئله میانه با ۳ تسهیل (median) بر روی شبکه‌ای متشکل از ۲۰ یال و ۱۰ گره، تعداد کل جواب‌های بالقوه جهت جایابی تسهیلات برابر کدام است؟

۱۲۰ و ۷۲۰ (۲)

۷۲۰ و ۱۲۰ (۱)

۱۲۰ و بی‌نهایت (۴)

بی‌نهایت و ۱۲۰ (۳)

- ۳۸ چنانچه فرمولاسیون ریاضی مسئله پوشش مجموعه به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j \in J} y_j \\ \text{s.t.: } \sum_{j \in J} a_{ij} - y_j \geq 1 \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$$

دو ستون  $I$  و  $K$  را در نظر بگیریم که در آن بهازای کلیه مقادیر  $i \in I$  داشته باشیم  $a_{il} \leq a_{ik}$  و برای حداقل یکی از آن‌ها رابطه  $a_{il} < a_{ik}$  برقرار باشد. همچنین دو محدودیت  $m$  و  $n$  را داشته باشیم به نحوی که بهازای کلیه نقاط  $j \in J$  رابطه  $a_{mj} \leq a_{nj}$  برقرار باشد و برای حداقل یکی از نقاط  $j \in J$ ،  $a_{mj} < a_{nj}$  باشد. آنگاه کدامیک از محدودیت‌ها را می‌توان حذف نمود و مقدار کدامیک از متغیرهای تصمیم در جواب بهینه برابر صفر خواهد شد؟

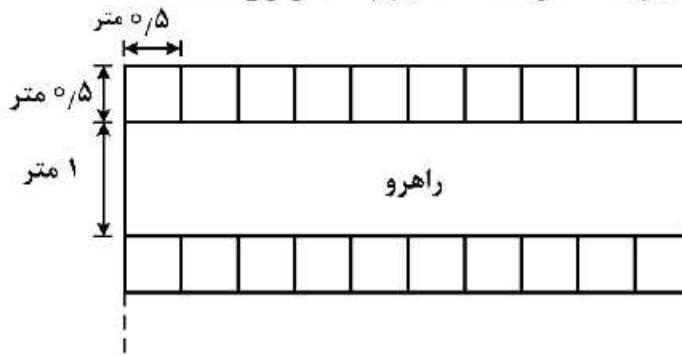
۲) محدودیت  $m$  و متغیر  $y_k$

۱) محدودیت  $m$  و متغیر  $y_l$

۴) محدودیت  $n$  و متغیر  $y_l$

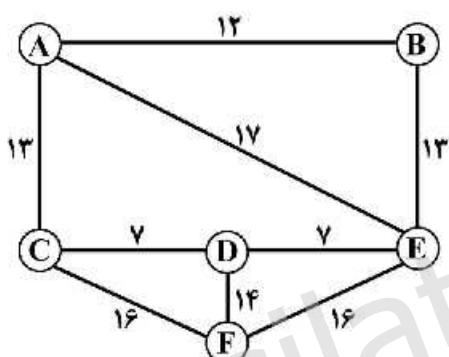
۳) محدودیت  $n$  و متغیر  $y_k$

- ۳۹- قرار است ۴۸۰۰۰ عدد لیوان (حداکثر مقدار موجودی) در کارتنهای با ظرفیت ۴۸ عدد در انباری مطابق شکل زیر نگهداری شود. اگر بتوان هر ۵ کارتنهای را روی هم چید و مساحت هر کارتنهای  $5 \times 5$  متر و عرض راهروها یک متر باشد و بهازای هر ۱۰ جایگاه یک راهرو مورد نیاز باشد، کل مساحت انبار چند مترمربع است؟



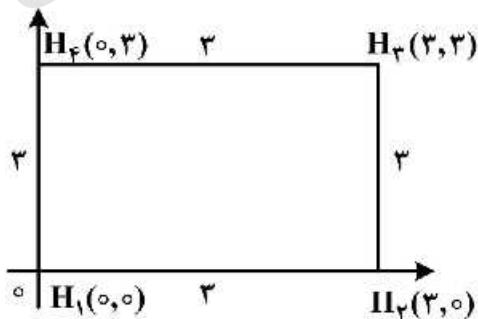
- (۱) ۲۰۰
- (۲) ۱۵۰
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۵۰

- ۴۰- یک ناحیه جغرافیایی متشکل از ۶ مرکز جمعیتی مفروض است که در شکل زیر راههای ارتباطی آن‌ها به همراه فواصل بین‌شان داده شده است. هدف پوشش‌دهی به کلیه نقاط تقاضا با توجه به فاصله پوشش ۱۵ واحدی است. در صورتی که فاصله پوشش ۳۰٪ کاهش یابد، تعداد تسهیلات مورد نیاز چند درصد افزایش خواهد یافت؟



- (۱) ۳۰
- (۲) ۵۰
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۲۰۰

- ۴۱- در رأس یک مربع به طول ۳ متر چهار ماشین موجود در نقاط  $H_1$  الی  $H_4$  مستقرند. چنانچه ماشین جدیدی بین ماشین‌های موجود با دو مدل مجدور فاصله مستقيمه و مدل خطی شکسته (معتماد) جایابی شود، نقطه بهینه کدام است؟ شدت جاذبه (وزن) بین ماشین‌های موجود با ماشین جدید به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

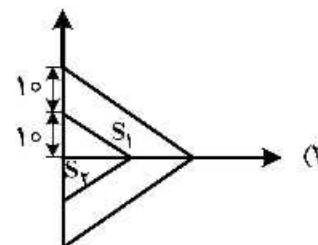
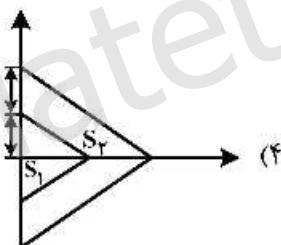
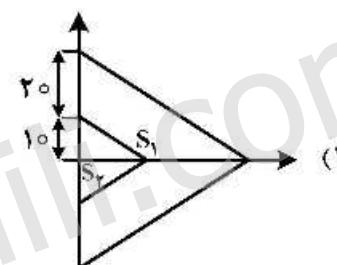
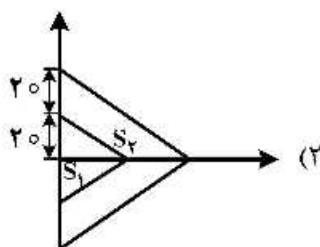


- (۱) مجدور  $(0,3)$  و خطی شکسته  $(x^* = 1/5, y^* = 2/1)$  است.
- (۲) با توجه به شرایط مسئله در هر دو حالت برابر با  $(x^* = 1/5, y^* = 1/5)$  است.
- (۳) مجدور  $(0,1/5)$  و خطی شکسته  $(x^* = 3, y^* = 3)$  است.
- (۴) مجدور  $(0,1/5)$  و خطی شکسته  $(x^* = 3, y^* = 2/1)$  است.

- ۴۲- شش منطقه جمعیتی در مکان‌های  $P_۶(۱۶,۶)$ ،  $P_۵(۱۰,۷)$ ،  $P_۴(۱۵,۱۵)$ ،  $P_۳(۹,۱۳)$ ،  $P_۲(۹,۱۸)$  و  $P_۱(۱۴,۱۵)$  استقرار دارند. هر ۶ نقطه جمعیتی از اهمیت یکسانی برخوردارند. قرار است یک واحد آتش‌نشانی این ۶ منطقه را پوشش دهد. اگر فاصله متعامد در نظر گرفته شود، برای این‌که مجموعه تراز  $S(k)$  وجود داشته باشد (غیر تهی شود) حداقل مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۶/۵
- (۲) ۸
- (۳) ۹/۵
- (۴) ۱۰

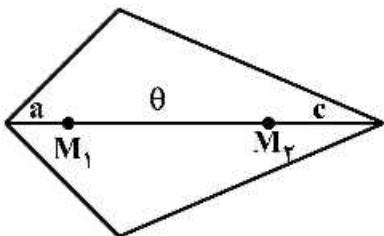
- ۴۳- چیدمان انباری ناحیه  $L$  از اجتماع ربع اول و چهارم دستگاه مختصات به دست آمده و یک بارانداز در مبدأ دارد. قرار است دو قلم کالا با مساحت  $A_۱ = ۱۰۰$  و  $A_۲ = ۳۰۰$  انبارش شوند. اگر  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، و انبارش کالاها به صورت پیوسته انجام شود، نحوه چیدمان بهینه، کدام است؟ (فاصل متعامد در نظر گرفته شود)



- ۴۴- تسهیلات  $P_i$  ( $i=1, \dots, 10$ ) در سطح کارگاهی مستقر شده‌اند. نقطه  $\bar{P}$  به عنوان نقطه‌ای است که از روش مرکز ثقل به عنوان مکان بهینه برای قرار گیری تسهیل جدید در میان تسهیلات موجود تعیین شده است. چنانچه از نقطه  $\bar{P}$  با شیب  $\frac{2}{3}$  به سمت بالا حرکت داشته باشیم و سایه این حرکت بر روی محور  $x$ ها برابر ۱۵ واحد باشد، چه میزان تغییر در مقدار تابع هدف خواهیم داشت؟

- (۱) ۱۷۵۷۸
- (۲) ۱۷۸۷۵
- (۳) ۱۸۷۵۵
- (۴) ۱۸۷۸۵

- ۴۵- فرض کنید تحت شرایط فاصله متعامد، دو تسهیل  $M_1$  و  $M_2$  در یک راستا و در فاصله  $\theta$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند. وزن تسهیل  $M_1$  بیشتر از  $M_2$  بوده و اختلاف اوزان این تسهیلات برابر  $\Delta$  فرض می‌شود. با توجه به شکل زیر که مبین خط تراز بهازای هزینه  $Z$  می‌باشد، کدام گزینه صحیح است؟



$$(w_1 - w_2)(a - c) = \Delta\theta \quad (1)$$

$$(w_1 + w_2)(a - c) = (w_1 + w_2)\theta \quad (2)$$

$$(w_1 - w_2) + (w_1 - w_2)c = \Delta\theta \quad (3)$$

$$(w_1 + w_2)a - (w_1 + w_2)c = \Delta\theta \quad (4)$$

| مقدار بحرانی توزیع مربع کای   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| مقدار بحرانی توزیع ز          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| سطع زبر منحنی نرمال استاندارد |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| <i>z</i>                      | .0    | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
| 0.0                           | .5000 | .5040 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 | .5399 |
| 0.1                           | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2                           | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3                           | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4                           | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5                           | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6                           | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7                           | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8                           | .7883 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9                           | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0                           | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1                           | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2                           | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3                           | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4                           | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5                           | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6                           | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7                           | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8                           | .9644 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 | .9713 |
| 1.9                           | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0                           | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1                           | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2                           | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3                           | .9893 | .9896 | .9908 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4                           | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9933 | .9934 | .9936 |
| 2.5                           | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6                           | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7                           | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8                           | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9                           | .9981 | .9982 | .9983 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9986 |
| 3.0                           | .9987 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1                           | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 | .9993 |
| 3.2                           | .9993 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9996 |
| 3.3                           | .9995 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4                           | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 |

| مقدار بحرانی توزیع مربع کای   |       |       |       |       |       |      |       |        |        |        |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|--------|--------|
| مقدار بحرانی توزیع ز          |       |       |       |       |       |      |       |        |        |        |
| سطع زبر منحنی نرمال استاندارد |       |       |       |       |       |      |       |        |        |        |
| <i>df</i>                     | .10   | .05   | .025  | .01   | .005  | .001 | .0009 | .0009  | .0009  | .0005  |
| 1                             | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 1    | 4E-5  | 0.0001 | 0.0001 | 0.0005 |
| 2                             | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 2    | 0.910 | 0.0201 | 0.0506 | 0.2971 |
| 3                             | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 3    | 0.971 | 0.1148 | 0.3318 | 0.4844 |
| 4                             | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 4    | 0.206 | 0.2971 | 0.7107 | 9.4877 |
| 5                             | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5    | 0.411 | 0.5543 | 1.1454 | 14.860 |
| 6                             | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 6    | 0.675 | 0.8720 | 1.2373 | 15.086 |
| 7                             | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 7    | 0.989 | 1.2390 | 1.6353 | 16.811 |
| 8                             | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 8    | 1.144 | 1.6465 | 2.1797 | 17.534 |
| 9                             | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 9    | 1.734 | 2.0879 | 2.7003 | 21.665 |
| 10                            | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 10   | 2.155 | 2.5582 | 3.2469 | 23.188 |
| 11                            | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 11   | 2.603 | 3.0534 | 3.8157 | 24.724 |
| 12                            | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 12   | 3.073 | 3.5705 | 4.4037 | 26.756 |
| 13                            | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 13   | 3.565 | 4.1069 | 5.0087 | 27.616 |
| 14                            | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 14   | 4.074 | 4.6604 | 5.6287 | 27.688 |
| 15                            | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 15   | 4.600 | 5.2291 | 6.2621 | 29.141 |
| 16                            | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 16   | 5.142 | 5.8122 | 6.9076 | 30.577 |
| 17                            | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 17   | 5.697 | 6.4077 | 7.5641 | 31.999 |
| 18                            | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 18   | 6.264 | 7.2037 | 8.3904 | 33.408 |
| 19                            | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 19   | 6.843 | 7.6127 | 8.9065 | 35.176 |
| 20                            | 1.325 | 1.723 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 20   | 7.433 | 8.2604 | 9.5907 | 36.190 |
| 21                            | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 21   | 8.033 | 8.8972 | 10.282 | 37.566 |
| 22                            | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 22   | 8.642 | 9.5424 | 11.982 | 38.932 |
| 23                            | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 23   | 9.260 | 10.195 | 12.338 | 40.289 |
| 24                            | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 24   | 9.886 | 10.900 | 13.090 | 42.795 |
| 25                            | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 25   | 10.52 | 11.523 | 13.119 | 44.134 |
| 26                            | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 26   | 11.16 | 12.198 | 13.843 | 45.641 |
| 27                            | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 27   | 11.80 | 12.878 | 14.573 | 46.962 |
| 28                            | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 28   | 12.46 | 13.564 | 15.307 | 48.278 |
| 29                            | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 29   | 13.12 | 14.256 | 16.047 | 49.587 |
| 30                            |       |       |       |       |       | 30   | 13.78 | 14.953 | 16.790 | 49.587 |