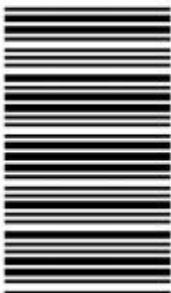


کد گنترل



271E

271

E

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

صبح جمعه	۱۳۹۶/۱۲/۴	دفترچه شماره (۱)		«آئور دانشگاه اصلاح شوه مملکت اصلاح می شود.» امام خمینی (ره) جمهوری اسلامی ایران وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان منجذب آموزش کشور
<b>آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه مرکز) - سال ۱۳۹۷</b>				
<b>رشته ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)</b>				
مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه			تعداد سوال: ۴۵	
عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات				
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی	۴۵	۱	۴۵
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.				
این آزمون نظره منفی دارد.				
حق حابه تکثیر و منتشر مقالات به هر روش (الکترونیکی و...)، بس از برگزاری آزمون، برای نعمتی انسان خلبان و خلوق نهاد با عجز این سازمان عجاز می‌باشد و با عذالتین بر افراد غیر از این شرکت				

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، بهمنزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

-۱ فرض کنید  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی یکنوا باشد. کدام گزینه پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد؟

(۱) برد  $f$  بسته باشد.

(۲) خاصیت مقدار میانی داشته باشد.

(۳) حد تابع  $f$  در هر نقطه بازه  $[a, b]$  موجود باشد.

(۴) بر  $[a, b]$  دارای تابع اولیه باشد.

-۲ فرض کنید  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  زیر مجموعه اعداد حقیقی باشد. ( $\bar{A}$  بستان  $A$  و  $\partial A$  مرز  $A$

است)، کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱)  $\partial A \neq \bar{A}$  بسته نیست و  $A$

(۲)  $\partial A = \bar{A}$  بسته نیست و  $A$

(۳)  $\partial A = \bar{A}$  بسته است و  $A$

(۴)  $\partial A \neq \bar{A}$  بسته است و  $A$

-۳ فرض کنید  $E$  زیر مجموعه‌ای از فضای متریک  $(X, d)$  است به‌طوری که  $E^\circ = E$  و  $\phi = \bar{E}^\circ$ . اگر

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

(۱) فقط بر  $E^c$  پیوسته است.

(۲) هیچ‌جا پیوسته نیست.

-۴ فرض کنید  $d_1$  و  $d_2$  دو متر بر مجموعه ناتبی  $X$  باشند، به‌طوری که برای هر دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  و  $x \in X$ ، اگر

$d_1(x_n, x) \rightarrow 0$  آنگاه  $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$ . کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $(X, d_1)$  همبند باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  همبند است.

(۲) اگر  $(X, d_1)$  فشرده باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  فشرده است.

(۳) اگر  $(X, d_1)$  کامل باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  کامل است.

(۴) اگر  $(X, d_2)$  در  $(X, d_1)$  بسته باشد، آنگاه  $E$  در  $(X, d_1)$  بسته است.

-۵ فرض کنید تابع  $A = \left\{ \frac{f(a) - f(x)}{a - x} : x \in \mathbb{R}, x \neq a \right\}$ . کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر  $A$  بیکران باشد آن‌گاه  $f'$  در  $a$  مشتق‌پذیر است.
- (۲) اگر  $f'$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $A$  بیکران است.
- (۳) اگر  $f'$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $A$  کراندار است.
- (۴) اگر  $A$  کراندار باشد آن‌گاه  $f'$  در  $a$  مشتق‌پذیر است.

-۶ اگر  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  . کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $f$  بیکران است.
- (۲)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  موجود است.
- (۳)  $f$  بینهایت بار مشتق‌پذیر است.
- (۴) مجموعه نقاطی که تابع  $f$  صفر می‌شود متناهی است.

-۷ تابع  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید و قرار دهید (۱) . کدام گزینه شرط لازم و کافی برای هم‌پیوستگی دنباله  $\{f_n\}$  است؟

- (۱)  $f$  کراندار باشد.
- (۲)  $f$  پیوسته باشد.
- (۳)  $f$  پیوسته یکنواخت باشد.
- (۴) تابع ثابت باشد.

-۸ سری  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin(nx)(1-\sin x)^n$  ... بر بازة  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  ...

- (۱) برای هیچ  $\alpha > 0$  همگرای نقطه‌ای نیست.
- (۲) برای هر  $\alpha \in \mathbb{R}$  همگرای یکنواخت است.
- (۳) فقط برای  $\alpha < -1$  همگرای یکنواخت است.
- (۴) برای هر  $\alpha \in \mathbb{R}$  همگرای نقطه‌ای است ولی همگرای یکنواخت نیست.

-۹ به ازای چه مقادیری از  $a$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$ ، همگرا می‌باشد؟

- (۱)  $a \in \mathbb{Z}$
- (۲)  $a \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- (۳)  $a \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi k + \pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$
- (۴)  $a \in \mathbb{R}$

$$D : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \circ \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_1 \end{bmatrix}$$

تبديل خطی  $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  با ضابطه  $D$  داده شده است. در این صورت نمایش ماتریس  $D$

نسبت به پایه استاندارد برابر است با:

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \hline -1 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{array} \right] \quad (1)$$

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \hline -1 & & & \\ \vdots & & -I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{array} \right] \quad (2)$$

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} \circ & -1 & \dots & -1 \\ \hline -1 & & & \\ \vdots & I_{n-1} & & \\ -1 & & & \end{array} \right] \quad (3)$$

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} \circ & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & I_{n-1} & & \\ 0 & & & \end{array} \right] \quad (4)$$

- ۱۱- فرض کنید  $A$  ماتریس  $5 \times 5$  باشد که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر با ۶ و مابقی درایه‌ها برابر با ۱ هستند.  $\det(A)$  کدام است؟

۲(۵<sup>۱</sup>) (۱)

۲(۵<sup>۵</sup>) (۲)

۲(۵<sup>۹</sup>) (۳)

۲(۵<sup>۷</sup>) (۴)

- ۱۲- فرض کنید  $V$  و  $W$  فضاهای برداری روی میدان  $F$  و  $S \subseteq V$  باشند. آنگاه  $(V_1 + V_2)^\circ$  برابر است با:

$V_1^\circ \cap V_2^\circ$  (۱)

$V_1^\circ + V_2^\circ$  (۲)

$(V_1 \cap V_2)^\circ$  (۳)

$\{\circ\}$  (۴)

-۱۳- فرض کنید  $P_n(\mathbb{C})$  فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌ها از درجه حداقل  $n$  با ضرایب روی میدان اعداد مختلط باشد و  $T(f(x)) = 2f'(x) + \int_0^x f(t)dt$  با خصایط  $T: P_n(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})$  باشد. در این صورت اگر

$$\text{آنگاه: } b = \dim_{\mathbb{R}} (\ker(T)) \text{ و } a = \dim_{\mathbb{R}} (\text{Im}(T))$$

$$b=4, a=2 \quad (1)$$

$$b=2, a=4 \quad (2)$$

$$b=3, a=3 \quad (3)$$

$$b=0, a=6 \quad (4)$$

-۱۴- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی باشند به‌طوری‌که  $AB = A^T + A + I$ . در این صورت کدام صحیح است؟

$$AB = I \quad (1)$$

$$AB = BA \quad (2)$$

$$\det(A) = \det(B) = 1 \quad (3)$$

$$AB = AB^T \quad (4)$$

-۱۵- فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $H, K \leq G$ . در این صورت:

$$|\langle H, K \rangle : K| = |H : H \cap K| \quad (1)$$

$$|G : H \cap K| = |G : H| |G : K| \quad (2)$$

$$|H : H \cap K| \geq |\langle H, K \rangle : K| \quad (3)$$

$$G = \langle H, K \rangle \quad \text{آنگاه} \quad |H : H \cap K| > \frac{1}{2} |G : K| \quad (4)$$

-۱۶- فرض کنید  $G$  یک گروه بوده و برای هر  $(ab)^{10} = a^{10} b^{10}$ . در این صورت کدام مورد صحیح نیست؟

(۱) مشتق دوم  $G$  زیرگروه همانی است.

(۲)  $\left\{ x^9 \mid x \in G \right\}$  زیرگروه نرمال  $G$  است.

(۳)  $\left\{ x^{10} \mid x \in G \right\}$  زیرگروه نرمال  $G$  است.

(۴) مشتق  $\left\{ x^{10} \mid x \in G \right\}$  در  $G$  نرمال است.

-۱۷- با کدام حلقه یکویاخت است?

$$Q \quad (1)$$

$$Q \times \mathbb{Z}_2 \quad (2)$$

$$Q \times Q \quad (3)$$

$$\frac{Q[x]}{(x^r)} \quad (4)$$

-۱۸ کدام جفت از حلقه‌های زیر، یکریخت هستند؟

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}[x] \quad (1)$$

$$\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x,y] \quad (2)$$

$$\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^7)}, \frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^7+1)} \quad (3)$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{7}], \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] \quad (4)$$

-۱۹ فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب برابر با تعداد اعضای خودتوان و اعضای پوچ‌توان در حلقة  $\mathbb{Z}_{180}$  باشد. در این صورت حاصل  $A+B$  کدام است؟

$$10 \quad (1)$$

$$14 \quad (2)$$

$$12 \quad (3)$$

$$16 \quad (4)$$

-۲۰ کدام یک از معادلات زیر در  $S_6$  دارای جواب است؟

$$a^{-1}(12)a = (34)(15) \quad (1)$$

$$a^{-1}(123)a = (125)(34) \quad (2)$$

$$(125)a = (34)(236)a \quad (3)$$

$$a^{-1}(12)(34)a = (56)(13) \quad (4)$$

-۲۱ تعداد زیرگروه‌های  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  چند است؟

$$4 \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$7 \quad (3)$$

$$8 \quad (4)$$

توجه: در سوالات زیر همواره مدول‌ها یکانی هستند.

-۲۲ -مدول زیر با کدامیک از  $\mathbb{Z}$ -مدول‌های زیر یکریخت است؟

$$(\mathbb{Z}_7 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \otimes (\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \quad (1)$$

$$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \quad (2)$$

$$\mathbb{Z}_{17} \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \quad (3)$$

$$\mathbb{Z}_{17} \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \quad (4)$$

- ۲۳- فرض کنید  $R$  یک حلقه جایه‌جایی و یکدار باشد. اگر  $R$  حلقه آرتینی باشد، آنگاه کدام مورد صحیح نیست؟

(۱)  $J(R)$  یک ایده‌آل پوچ‌توان است.

(۲)  $R$  دارای فقط تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال است.

(۳) هر ایده‌آل  $R$  یک ایده‌آل اول  $R$  است.

(۴) هر ایده‌آل اول  $R$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $R$  است.

- ۲۴- کدام یک از گروه‌های آبلی زیر غیربدیدهی (ناصفر) است؟

$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  (۱)

که در آن  $p$  و  $q$  اعداد اول متمایز هستند. (۲)

که در آن  $p$  یک عدد اول است. (۳)

که در آن  $p$  یک عدد اول است. (۴)

- ۲۵- همه مدول‌های زیر تصویری هستند، بهجز:

(۱) هر مدول خارج قسمتی از یک مدول آزاد

(۲) هر مجموع مستقیم از مدول‌های تصویری

(۳) هر جمع‌وند مستقیم از یک مدول تصویری

(۴) هر  $\mathbb{Z}$  - مدول متناهی تولید شده و خالی از تاب

- ۲۶- تعداد عناصر رادیکال جیکوبسن حلقه  $R$  کدام است؟

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_4 \right\}$$

۱ (۱)

۳ (۲)

۹ (۳)

۲۷ (۴)

- ۲۷- فرض کنید  $R$  یک حوزه صحیح باشد و  $F$  و  $F'$  دو  $R$  - مدول آزاد باشند. اگر  $x \in F$  و  $x' \in F'$  در

این صورت کدام مورد صحیح است؟

(۱) هر  $R$  - زیر مدول  $F \otimes_R F'$  آزاد است.

(۲) ممکن است آزاد نباشد.

(۳)  $R$  - منومورفیسم ( $R$  هم‌ریختی یک‌به‌یک)  $\varphi: F \rightarrow F'$  وجود دارد.

(۴)  $R$  در  $x \otimes x' \neq 0$ .

- ۲۸- فرض کنیم  $R' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$  و  $R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ . کدام عبارت در مورد حلقه‌های  $R$  و  $R'$  صحیح است؟

(۱) حلقه‌های  $R$  و  $R'$  هر دو نه نوتری و نه آرتینی هستند.

(۲) حلقه‌های  $R$  و  $R'$  هر دو هم نوتری و هم آرتینی هستند.

(۳) حلقه  $R$  نه نوتری و نه آرتینی است ولی حلقه  $R'$  آرتینی است ولی نوتری نیست.

(۴) حلقه  $R$  نه نوتری و نه آرتینی است ولی حلقه  $R'$  نوتری است ولی آرتینی نیست.

-۲۹- همه گزاره‌های زیر در مورد حلقه  $M_2(\mathbb{R})$  صحیح‌اند، به جز:

- (۱) حداقل یک ایده‌آل چپ سره و غیرصفر دارد که ماکسیمال چپ نیست.
- (۲) برای هر ایده‌آل چپ آن مانند  $I$  داریم  $I^T = I$ .
- (۳) هر ایده‌آل چپ سره و غیرصفر آن، مینیمال است.
- (۴) هر ایده‌آل چپ و غیرصفر آن شامل یک عضو پوج توان غیر صفر است.

-۳۰- فرض کنید  $\circ \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \circ$  یک دنباله دقیق از  $\mathbb{Z}$ -مدول‌ها باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) اگر دنباله شکافته شود آنگاه  $C$  تصویری است.
- (۲) اگر  $B = \mathbb{Z}_2$  آنگاه دنباله شکافته می‌شود.
- (۳) اگر  $B \cong A \oplus C$  آنگاه دنباله شکافته می‌شود.
- (۴)  $B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  آنگاه  $C = \mathbb{Z}_2$  و  $A = \mathbb{Z}$  اگر

-۳۱- گروه  $\mathbb{Z}_2$  را به عنوان مدول انژکتیو (تزریقی) روی کدام‌یک از حلقه‌های زیر می‌توان با ضرب اسکالر غیربدیهی در نظر گرفت؟

- (۱)  $\mathbb{Z}_4$
- (۲)  $\mathbb{Z}_5$
- (۳)  $\mathbb{Z}_6$
- (۴)  $\mathbb{Z}_7$

-۳۲- در مورد هر حلقه یکدار با حداقل ۲ عضو، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) زیرحلقه‌ای غیر صفر دارد که آرتینی است.
- (۲) زیرحلقه‌ای غیرصفر دارد که نوتری است.
- (۳) زیرحلقه‌ای غیرصفر دارد که میدان است.
- (۴) زیرحلقه‌ای غیرصفر دارد که دامنه صحیح است.

-۳۳- فرض کنید  $R$  یک حوزه صحیح باشد، در این صورت اگر  $F$  میدان کسرهای  $R$  باشد آنگاه با فرض نوتری بودن  $F$  به عنوان  $R$ -مدول کدام مورد صحیح است؟

- (۱)  $F$  انژکتیو و  $R$  غیرانژکتیو است. (به عنوان  $R$ -مدول)
- (۲) غیرانژکتیو و  $R$  انژکتیو است. (به عنوان  $R$ -مدول)
- (۳) هم  $F$  و هم  $R$  انژکتیو هستند. (به عنوان  $R$ -مدول)
- (۴) هر دو  $F$  و  $R$  غیرانژکتیو هستند. (به عنوان  $R$ -مدول)

-۳۴- فرض کنید  $X$  یک مجموعه ناشمارا باشد. کدام خانواده سیگما-جبر نیست؟

- (۱)  $\{E \subseteq X : E^c \text{ متناهی}\}$  یا  $\{E \subseteq X : E^c\}$
- (۲)  $\{E \subseteq X : E^c \text{ نامتناهی}\}$  یا  $\{E \subseteq X : E\}$
- (۳)  $\{E \subseteq X : E^c \text{ حداکثر شماراست}\}$  یا  $\{E \subseteq X : E^c\}$
- (۴)  $\{E \subseteq X : E \text{ ناشماراست}\}$  یا  $\{E \subseteq X : E^c\}$

-۳۵- اگر  $m$  اندازه لبگ روی  $\mathbb{R}$  و  $C$  مجموعه کانتور و  $D$  مجموعه اعداد اصم در بازه  $[\frac{\pi}{2}, 0]$  باشد، مقدار

$$\int\limits_C \sin x dm(x) + \int\limits_D \cos x dm(x)$$

برابر است با:

۱) -۱  
۲) صفر  
۳) ۱  
۴) ۲

-۳۶- در مورد زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ، کدام گزینه درست است؟

(۱) مرز هر مجموعه ناشمارا، اندازه‌پذیر است.

(۲) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت است.

(۳) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر است.

(۴) خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های دویه‌دو مجزا و اندازه‌پذیر با اندازه مثبت در  $[0, 1]$  وجود دارد.

-۳۷- فرض کنید  $m$  اندازه لبگ بر  $\mathbb{R}$  باشد. اگر  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  تابعی باشد که  $f \circ m$  (تکیب  $f$  و  $m$ ) یک اندازه است، در مورد آن کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f$  صعودی است ولی لزوماً جمعی نیست.

(۲) لزوماً  $f$  تابع همانی یا تابع ثابت است.

(۳)  $f$  جمعی است ولی لزوماً پیوسته نیست.

(۴)  $f$  جمعی و پیوسته است.

-۳۸-  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ و تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه معادل اندازه‌پذیری  $f$  نیست؟

(۱) برای هر زیرمجموعه فشرده  $A$  از  $\mathbb{R}$ ،  $f^{-1}(A)$  اندازه‌پذیر است.

(۲) برای هر زیرمجموعه متناهی  $A$  از  $\mathbb{R}$ ،  $f^{-1}(A)$  اندازه‌پذیر است.

(۳) برای هر عدد حقیقی  $a$ ،  $f^{-1}((a, a+1))$  اندازه‌پذیر است.

(۴) برای هر تابع اندازه‌پذیر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$  اندازه‌پذیر است.

-۳۹- کدام گزینه درست است؟

(۱) تکیب دو تابع اندازه‌پذیر لبگ، اندازه‌پذیر لبگ است.

(۲) تکیب دو تابع اندازه‌ناپذیر لبگ، اندازه‌ناپذیر لبگ است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع

(۳) تقریباً همه جا با تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  برابر است.

(۴) اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  دارای مشتق کراندار باشد، هر مجموعه اندازه‌پذیر لبگ را به مجموعه‌ای اندازه‌پذیر لبگ تصویر می‌کند.

- ۴۰ بازه  $[1, \infty)$  با اندازه لبگ  $m$  و مجموعه  $E = [0, \frac{1}{2}]$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x)$  فرد زوج

دنباله  $\{f_n\}$  به طور نقطه‌وار همگرا ..... و دنباله عددی  $\left\{\int_0^1 f_n dm\right\}$  همگرا

- (۱) است، است.
- (۲) نیست، است.
- (۳) است، نیست.
- (۴) نیست، نیست.

- ۴۱  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x \leq 2^n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ . درباره دنباله  $\{f_n\}$  کدام گزینه

درست است؟

- (۱)  $f_n \rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ، اما  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).
- (۲)  $f_n \rightarrow 0$  (در حرم  $L^2$  و  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).
- (۳)  $f_n \not\rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$  و  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).
- (۴)  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه)، اما  $f_n \not\rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ).

- ۴۲ بازه  $[1, \infty)$  با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $L^2[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^2$  همگرایی در نرم  $L^2$  را نتیجه می‌دهد.

(۲)  $L^2[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^2$  همگرایی در نرم  $L^2$  را نتیجه می‌دهد.

(۳)  $L^2[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^2$  همگرایی در نرم  $L^2$  را نتیجه می‌دهد.

(۴)  $L^2[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^2$  همگرایی در نرم  $L^2$  را نتیجه می‌دهد.

- ۴۳ فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع حقیقی نامنفی انتگرال‌پذیر بر یک فضای اندازه  $(X, S, \mu)$  باشد و

$$a_n = \int_X f_n d\mu$$

(۱) اگر  $a_n \rightarrow 0$  آنگاه  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا).

(۲) اگر  $a_n \rightarrow 0$  (در اندازه) آنگاه  $f_n \rightarrow 0$ .

(۳) اگر همگرا باشد، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (تقریباً همه جا).

(۴) اگر  $a_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا). آنگاه  $f_n \rightarrow 0$ .

۴۴- فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت و  $x$  و  $y$  دو عضو متعامد ناصرف آن باشند. گزاره‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 \quad (\text{الف})$$

(ب)  $x$  و  $y$  مستقل خطی هستند.

کدام گزینه درست است؟

(۱) (الف) و (ب) هر دو درست هستند.

(۲) (الف) درست است اما (ب) نادرست است.

(۳) (ب) درست است اما (الف) نادرست است.

(۴) (الف) و (ب) هیچ کدام درست نیستند.

۴۵- کدام گزینه معادل بanax بودن فضای ترمدار  $X$  نیست؟

(۱)  $L(X)$ , فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی  $X$  (با نرم عملگری) بanax است.

(۲) مجموعه  $\{1 : x \in X : \|x\| = \|x - y\| = d(x, y)\}$  با متر  $d(x, y) = \|x - y\|$  کامل است.

(۳) هر سری همگرای مطلق در  $X$  همگرا است.

(۴)  $X^*$ , فضای دوگان  $X$ , بanax است.

www.tahsilatetakmili.com