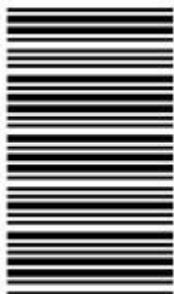


کد گنترول

272

E



272E

محل امضای:

نام:

نام خانوادگی:

صبح جمعه	۱۳۹۶/۱۲/۴	جمهوری اسلامی ایران	اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.» امام خمینی (ره)
دفترچه شماره (۱)		وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان سنجش آموزش کشور	
<b>آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌تمکز) - سال ۱۳۹۷</b>			
<b>رشته ریاضی کاربردی (کد ۲۲۳۴)</b>			
مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه		تعداد سوال: ۴۵	
عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات			
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس ها و جبر خطی - مبانی آنالیز عددی - آنالیز عددی پیشرفته - آنالیز حقیقی - تحقیق در عملیات پیشرفته	۴۵	۱
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.		این آزمون نمره متفقی دارد.	
حق جانبی تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیک و...) بس از برگزاری آزمون، برای تمام اشخاص خفیض و خلوق تها با مجوز این سازمان مجاز نیست و با منظکنین برای مغزرات و فثار عن شود.			

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، بهمنزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

-۱ فرض کنید  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی یکنوا باشد. کدام گزینه پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد؟

(۱) برد  $f$  بسته باشد.

(۲)  $f$  خاصیت مقدار میانی داشته باشد.

(۳) حد تابع  $f$  در هر نقطه بازه  $[a, b]$  موجود باشد.

(۴) بر  $[a, b]$  دارای تابع اولیه باشد.

-۲ فرض کنید  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :  $A = \{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}\}$  زیر مجموعه اعداد حقیقی باشد. ( $\bar{A}$  بستان  $A$  و  $\partial A$  مرز  $A$

است)، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱)  $\partial A = \bar{A}$  بسته نیست و

(۲)  $\partial A \neq \bar{A}$  بسته نیست و

(۳)  $\partial A = \bar{A}$  بسته است و

(۴)  $\partial A \neq \bar{A}$  بسته است و

-۳ فرض کنید  $E$  زیر مجموعه‌ای از فضای متریک  $(X, d)$  است به‌طوری‌که  $E^\circ = E$  و  $\phi = E^\circ$ . اگر

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

(۱) فقط بر  $E^\circ$  پیوسته است.

(۲) فقط بر  $E$  پیوسته است.

(۳) هیچ‌جا پیوسته نیست.

(۴) همه‌جا پیوسته است.

-۴ فرض کنید  $d_1$  و  $d_2$  دو متر بر مجموعه ناتهی  $X$  باشند، به‌طوری‌که برای هر دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  و  $x \in X$ ، اگر

$d_1(x_n, x) \rightarrow 0$  آنگاه  $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$ . کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $(X, d_1)$  همبند باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  همبند است.

(۲) اگر  $(X, d_2)$  فشرده باشد، آنگاه  $(X, d_1)$  فشرده است.

(۳) اگر  $(X, d_1)$  کامل باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  کامل است.

(۴) اگر  $E \subseteq X$  در  $(X, d_2)$  بسته باشد، آنگاه  $E$  در  $(X, d_1)$  بسته است.

-۵ فرض کنید تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  کراندار،  $a \in \mathbb{R}$  و  $A = \left\{ \frac{f(a) - f(x)}{a - x} : x \in \mathbb{R}, x \neq a \right\}$ . کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $A$  بیکران باشد آن‌گاه  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر است.

(۲) اگر  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $A$  بیکران است.

(۳) اگر  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $A$  کراندار است.

(۴) اگر  $A$  کراندار باشد آن‌گاه  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر است.

-۶ اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  . کدام گزینه

درست است؟

(۱) بیکران است.

(۲) موجود است.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(۳) بینهایت بار مشتق‌بذیر است.

(۴) مجموعه نقاطی که تابع  $f$  صفر می‌شود متناهی است.

-۷ تابع  $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید و قرار دهید (۱) کدام گزینه شرط لازم و کافی برای هم‌پیوستگی دنباله  $\{f_n\}$  است؟

(۱) کراندار باشد.  $f$  پیوسته باشد.

(۲) تابع ثابت باشد.  $f$  پیوسته یکنواخت باشد.

-۸ به ازای چه مقادیری از  $a$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$ ، همگرا می‌باشد؟

(۱)  $a \in \mathbb{Z}$

(۲)  $a \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(۳)  $a \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi k + \pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

(۴)  $a \in \mathbb{R}$

-۹ تبدیل خطی  $\varphi(A) = A + A^T$  با ضابطه  $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  را در نظر بگیرید. رتبه  $\varphi$  برابر است با:

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

-۱۰ فرض کنید  $M_2(\mathbb{Q})$  فضای برداری ماتریس‌های  $3 \times 3$  روی میدان  $\mathbb{Q}$  است و داریم:

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

یک زیرفضای برداری  $M_2(\mathbb{Q})$  است. بعد  $E$  چقدر است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۶ (۳)

۹ (۴)

- ۱۱  $\alpha = \{x, 2x+1\}$  و  $\beta = \{x+2, -x+1\}$  پایه‌های مرتب فضای برداری چندجمله‌ای‌ها با درجه حداقل ۱ روی  $\mathbb{R}$  می‌باشند. ماتریس نمایش تبدیل خطی که پایه  $\beta$  را نظیر به نظیر به پایه  $\alpha$  می‌برد برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- ۱۲ فرض کنید  $(AB)^\top = 0$  و  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ . در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$A^\top = B^\top \quad (1)$$

$$AB^\top = B^\top A \quad (2)$$

$$A^\top B^\top = B^\top A^\top \quad (3)$$

$$(AB)^\top = (BA)^\top \quad (4)$$

- ۱۳ فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که  $\det(A) = 0$  و  $\text{tr}(A^\top) = 1$ . حاصل ضرب مقادیر ویژه ناصلفر  $A$  برابر است با:

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\sqrt{2} \quad (4)$$

- ۱۴  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی روی  $\mathbb{R}$  می‌باشد. فرض کنید  $T: V \rightarrow V$  تبدیل خطی است که برای هر  $v \in V$  داریم  $T(T(v)) = -v$ .  $\dim V$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$6 \quad (1)$$

$$7 \quad (2)$$

$$9 \quad (3)$$

$$15 \quad (4)$$

- ۱۵-  $I_3$  ماتریس همانی  $3 \times 3$  و  $J_3$  ، ماتریسی  $3 \times 3$  است که تمام درایه‌های آن ۱ می‌باشد. برای ماتریس زیر مجموع و تکرر مقدار ویژه صفر کدام است؟ rank A

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

- ۱) ۵
- ۲) ۶
- ۳) ۷
- ۴) ۸

- ۱۶- اگر A یک ماتریس مربعی حقیقی و غیر همانی باشد که  $A^t = A^2$  (ترانهاده)، آنگاه مقادیر ویژه A کدام است؟

- ۱) ۱ و ۲
- ۲) -۲ یا ۱
- ۳) ۰ با ۱
- ۴) ۰ و -۱

- ۱۷- در یک دستگاه مسیر شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲ با ۱۰ رقم مانتیس و روش بریدن در نمایش اعداد، فاصله بین عدد قابل نمایش  $P^{10} < 1 < P^{11}$  ، و بزرگ‌ترین عدد قابل نمایش کوچک‌تر از  $P^{11}$  کدام است؟

- ۱)  $2^{-9}$
- ۲)  $2^{-10}$
- ۳)  $2^{P-10}$
- ۴)  $2^{P-9}$

- ۱۸- فرض کنید  $\alpha$  ریشه ساده معادله  $f(x) = 0$  و  $f''(\alpha) \neq 0$ . موثبیه همگرایی روش نیوتون برای محاسبه تقریبی از  $\alpha$  کدام است؟

- ۱) ۱) دست کم ۲
- ۲) خطی
- ۳) دست کم ۴
- ۴) دست کم ۳

- ۱۹- تقریب  $f(x) = \cos x$  درباره  $x = 0$  با قطعه‌های درونیاب خطی روی زیربازه‌ها با طول برابر مد نظر است. طول هر زیربازه دست کم چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی ناشی از درونیاب‌های خطی روی هر زیربازه بیش از

$$\frac{1}{2} \times 10^{-8}$$

- |                                  |                        |
|----------------------------------|------------------------|
| $2 \times 10^{-4}$ (۱)           | $4 \times 10^{-4}$ (۲) |
| $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ (۳) | $2 \times 10^{-3}$ (۴) |

- ۲۰- قاعده انتگرال گیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left[ af(-1) + bf\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $k$  چقدر باشند تا این قاعده برای چندجمله‌ای‌هایی با بیشترین درجه ممکن  $k$  دقیق باشد؟

$$a = 1, b = 3, k = 1 \quad (۱)$$

$$a = 1, b = 2, k = 2 \quad (۲)$$

$$a = 1, b = 1, k = 1 \quad (۳)$$

$$a = 1, b = 1, k = 2 \quad (۴)$$

- ۲۱ برای چه مقادیر  $w_1$  و  $w_2$  روش انتگرال‌گیری (۱) برای توابع چندجمله‌ای خطی دقیق است؟

$$w_2 = \frac{2}{5}, w_1 = \frac{4}{35} \quad (۱)$$

$$w_2 = \frac{2}{5}, w_1 = \frac{2}{7} \quad (۲)$$

$$w_2 = \frac{2}{7}, w_1 = \frac{4}{35} \quad (۳)$$

$$w_2 = \frac{2}{7}, w_1 = \frac{2}{5} \quad (۴)$$

- ۲۲ اگر  $\bar{x}$  جواب محاسبه شده برای یک مسأله و  $x$  جواب دقیق مسأله باشد و بتوان نشان داد که  $\|x - \bar{x}\| \leq 10^{-3} + 10^{-10} \|x\|$  و  $\|\bar{x}\| > 10^{-7}$  آن‌گاه تعداد رقم‌های دهدۀ یکسان در  $x$  و  $\bar{x}$  دست کم برابر است با

(۱) ۱۱

(۲) ۱۷

(۳) ۱۸

(۴) ۳۰

- ۲۳ درونیاب گویا به صورت  $\emptyset(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$  برای نقاط  $(i, i^r)$ ،  $i = 0, 1, 2$  برای نتایج

(۱) وجود ندارد.

(۲) برابر  $\frac{3x}{5-2x}$  است.

(۳) یکتاست.

(۴) به تعداد نامتناهی وجود دارد.

- ۲۴ فرض کنید  $p(y)$  یک چند جمله‌ای درونیاب برای داده به صورت  $((y_i, y_i^r))$  با  $y_i = 0, 1, 2, 3$  باشد. در این صورت،  $p(y)$  برابر است با

(۱)  $y^r$

(۲)  $2y^r$

(۳)  $2y^r - y^r$

(۴) یک چندجمله‌ای از درجه ۴

- ۲۵ فرض کنید  $s(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x + \frac{8}{3}$  و  $x_0 = 1$ ،  $x_1 = 2$ ،  $x_2 = 4$  و  $x_3 = 5$  باشد. اگر  $r(x) = x^3 - x$  چند جمله‌ای درونیاب در نقاط  $x_1, x_2, x_3$  باشد. اگر  $p(x)$  چند جمله‌ای درونیاب درجه سه در چهار نقطه  $x_3, x_2, x_1, x_0$  باشد،  $p(3)$  کدام است؟

$$\frac{35}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{35}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{35}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{35}{4} \quad (۴)$$

- ۲۶- فرض کنید  $\Delta = \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  افرازی از بازه  $[0, 1]$  و  $Y = \{y_0, y_1, y_2\}$  مقایر تابع  $f$  در نقاط  $x_i \in \Delta$  و  $x_0 \in \Delta$  درونیاب اسپلاین درجه سه طبیعی به صورت زیر باشد:

$$S_{\Delta}(y; x) = \begin{cases} 1 + ax + bx^2 + cx^3, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 + d(x - \frac{1}{2}) + e(x - \frac{1}{2})^2 - f(x - \frac{1}{2})^3, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

مقادیر  $a, b, c, d, e$  و  $f$  کدام است؟

$e = 2$  و  $b = 0$  (۱)

$e = 0$  و  $b = 2$  (۲)

$e = 5$  و  $b = 0$  (۳)

$e = b = 0$  (۴)

- ۲۷- در فرمول انتگرال غیری  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} f(x) dx + \frac{1}{1-\varepsilon} \int_{1-\varepsilon}^1 f(x) dx \right] + E(f)$  هسته پنانو، کدام است؟

$k(t), t \in [0, 1], k(0) = 0$

$\frac{1}{2}(1-t)^2(1-\frac{1}{2\varepsilon})$  (۱)

$\frac{1}{2}t(1-t)$  (۲)

$-\frac{1}{2}t(1-t) + \frac{1}{4}\varepsilon$  (۳)

$\frac{1}{2}t^2(1-\frac{1}{2\varepsilon})$  (۴)

- ۲۸- در محاسبه تخمینی برای انتگرال معین  $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$  به روش ذوزنقه‌ای مرکب روی  $n > 1$  زیر بازه با

طول هر زیر بازه برابر با  $h = \frac{\pi}{2n}$  ، مرتبه خطای برابر است با ....

$h^2$  (۱)

$h^3$  (۲)

$h^4$  (۳)

$h^5$  (۴)

- ۲۹- در مورد زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ، کدام گزینه درست است؟

(۱) مرز هر مجموعه ناشمارا، اندازه‌پذیر است.

(۲) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت است.

(۳) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای اندازه‌نابذیر است.

(۴) خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های دویه‌دو مجزا و اندازه‌پذیر با اندازه مثبت در  $[0, 1]$  وجود دارد.

- ۳۰- فرض کنید  $m$  اندازه لبگ بر  $\mathbb{R}$  باشد. اگر  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  تابعی باشد که  $f \circ m$  (ترکیب  $f$  و  $m$ ) یک اندازه

است، در مورد  $f$  کدام گزینه درست است؟

(۱) لزوماً  $f$  تابع همانی یا تابع ثابت است.

(۲)  $f$  صعودی است ولی لزوماً جمعی نیست.

(۳)  $f$  جمعی و پیوسته است.

(۴)  $f$  جمعی است ولی لزوماً پیوسته نیست.

- ۳۱ - بازه  $[1, \infty)$  با اندازه لبگ  $m$  و مجموعه  $E = [\circ, \frac{1}{n}]$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \chi_E(x) & \text{فرد} \\ 1 - \chi_E(x) & \text{زوج} \end{cases}$

دنباله  $\{f_n\}$  به طور نقطه‌وار همگرا ..... و دنباله عددی  $\left\{ \int_0^x f_n dm \right\}$  همگرا

- (۱) است، است.
- (۲) نیست، است.
- (۳) است، نیست.
- (۴) نیست، نیست.

- ۳۲ -  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. فرض کنید دنباله  $\{f_n\}$  کدام گزینه درغیراین صورت

درست است؟

(۱)  $f_n \rightarrow \circ$  (در نرم  $L^\infty$ ), اما  $f_n \not\rightarrow \circ$  (در اندازه).

(۲)  $f_n \rightarrow \circ$  (در نرم  $L^\infty$ ) و  $f_n \not\rightarrow \circ$  (در اندازه).

(۳)  $f_n \not\rightarrow \circ$  (در نرم  $L^\infty$ ) و  $f_n \not\rightarrow \circ$  (در اندازه).

(۴)  $f_n \not\rightarrow \circ$  (در اندازه)، اما  $f_n \rightarrow \circ$  (در نرم  $L^\infty$ ).

- ۳۳ - فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع حقیقی، نامنفی انتگرال‌پذیر بر یک فضای اندازه  $(X, S, \mu)$  باشد و

$$a_n = \int_X f_n d\mu$$

(۱) اگر  $a_n \rightarrow \circ$ , آنگاه  $f_n \rightarrow \circ$  (تقریباً همه‌جا).

(۲) اگر  $a_n \rightarrow \circ$  (در اندازه)، آنگاه  $f_n \rightarrow \circ$ .

(۳) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد، آنگاه  $f_n \rightarrow \circ$  (تقریباً همه‌جا).

(۴) اگر  $a_n \rightarrow \circ$  (تقریباً همه‌جا)، آنگاه  $f_n \rightarrow \circ$ .

- ۳۴ - فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت و  $x$  و  $y$  دو عضو متعامد ناصرف آن باشند. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(الف) \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$$

(ب)  $x$  و  $y$  مستقل خطی هستند.

کدام گزینه درست است؟

(۱) (الف) و (ب) هر دو درست هستند.

(۲) (الف) درست است اما (ب) نادرست است.

(۳) (ب) درست است اما (الف) نادرست است.

(۴) (الف) و (ب) هیچ کدام درست نیستند.

- ۳۵ فرض کنید  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$  دنباله‌ای اکیداً صعودی و همگرا به  $a \in \mathbb{R}^+$  باشد. عملگر خطی  $T: \ell^{\infty} \rightarrow \ell^{\infty}$  را با

$$T(\{x_n\}) = \{a_n x_n\} \quad (\{x_n\} \in \ell^{\infty})$$

(۱)  $T$  کراندار است و  $\|T\| = \sqrt{a}$

(۲)  $T$  کراندار است و  $\|T\| = a$

(۳)  $T$  کراندار است و  $\|T\| = a^2$

(۴)  $T$  بی‌کران است.

- ۳۶ فرض کنید  $\{S\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  ناتهی است که در آن  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  است. به علاوه، بردار ناصرف

$$d \in \mathbb{R}^n \text{ وجود دارد به طوری که } Ad = 0. \text{ آنگاه} \dots$$

(۱) نقطه رأسی ندارد و بی‌کران است.

(۲) نقطه رأسی ندارد ولی لزوماً بی‌کران نیست.

(۳) می‌تواند نقطه رأسی داشته باشد ولی حتماً بی‌کران است.

(۴) می‌تواند نقطه رأسی داشته باشد ولی لزوماً بی‌کران نیست.

- ۳۷ اگر در یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس، مقدار آزمون می‌نیمم کسر (مربوط به شدنی بودن) برای همه متغیرهای غیرپایه‌ای برابر با صفر باشد، آنگاه

(۱) ناحیه شدنی تنها یک نقطه نابهایده دارد.

(۲) ناحیه شدنی تنها یک نقطه تباهیده دارد.

(۳) ناحیه شدنی ممکن است بیش از یک نقطه داشته باشد و همگی نابهایده باشند.

(۴) ناحیه شدنی ممکن است بیش از یک نقطه با دست‌کم یک نقطه راسی تباهیده داشته باشد.

- ۳۸ فرض کنید جدول زیر بخشی از یک جدول سیمپلکس برای حل مسأله (P) است. آنگاه مقدار

$$\begin{cases} \text{Min } z = c^t x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

متغیر  $x_5$  در هر جواب

	$z$	$x_5$					RHS
$z$	1						
	0						
:	:						
$x_5$	0	0	...	0	1	0	0
:	0	0	...	0	0	0	0

(۱) شدنی مسأله (P) صفر است.

(۲) شدنی رأسی مسأله (P) صفر است ولی در نقاط غیر رأسی لزوماً صفر نیست.

(۳) بهینه مسأله (P) صفر است ولی در نقاط غیربهینه لزوماً صفر نیست.

(۴) تهیگن (تباهیده) مسأله (P) صفر است ولی در نقاط نابهایده لزوماً صفر نیست.

- ۳۹ مجموعه  $S$  به صورت  $S = \{x \mid Ax \leq b, L \leq x \leq U\}$  که در آن،  $A, L, U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $b \in \mathbb{R}^m$ ،  $L \leq U$  و

(۱) همواره تهی است.

(۴) می‌تواند تهی یا ناتهی باشد.

(۲) بی‌کران است.

(۳) همواره ناتهی است.

- ۴۰- مدل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای کراندار زیر داده شده است (دقت گنید مسأله ماکزیمم‌سازی است):

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 4$$

$$1 \leq x_1 \leq 4, -2 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 2$$

یک جواب پایه‌ای شدنی را در نظر بگیرید که در آن  $x_3$  و  $x_4$  متغیرهای پایه‌ای و  $x_1$  و  $x_2$  غیر پایه‌ای باشند که  $x_1$  در کران پایین و  $x_2$  در کران بالا قرار دارند. با شروع از این جواب پایه‌ای پس از یک تکرار روش سیمپلکس با متغیرهای کراندار، مقدار بهینه برابر است با .....

۱۶ (۲)

۴ (۱)

۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

- ۴۱- مسئله (P) را به صورت

$$\text{Max } b^T v$$

$$\text{s.t. } A^T v \leq c \quad (P)$$

$$v \leq 0$$

با  $c \geq 0$  در نظر بگیرید و دو گان آن را (D) بنامید، در این صورت کدام مورد صحیح است؟

(۱) مسئله (D) یا جواب بهینه دارد یا ناشدنی است.

(۱) می‌تواند بی کران باشد.

(۲) اگر  $b \leq 0$  آن گاه (D) ناشدنی است.

(۲) و (P) هر دو جواب بهینه دارند.

- ۴۲- مسئله (P) را به صورت

$$\text{Min } Z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \geq b \quad (P)$$

$$x \geq 0$$

با  $b \leq 0$  و  $c \geq 0$  در نظر بگیرید. قید جدید  $d^T x \geq 0$  را به مسئله (P) اضافه کنید و مسئله جدید را

(P') بنامید. کدام مورد صحیح است؟

(۱) دو گان (P') می‌تواند ناشدنی باشد.

(۲) (P) و (P') هر دو جواب‌های بهینه دارند.

(۳) می‌تواند جواب بهینه داشته باشد ولی (P') جواب بهینه نداشته باشد.

(۴) می‌تواند جواب بهینه داشته باشد ولی (P) جواب بهینه نداشته باشد.

- ۴۳- اگر یک مسئله برنامه‌ریزی خطی اولیه جواب بهینه داشته باشد و متغیر جدیدی همراه با ضرایب مربوط درتابع

هدف و قیدها به مسأله اضافه شود، آن گاه دو گان مسئله جدید .....

(۱) می‌تواند بی کران باشد.

(۱) شدنی است.

(۲) یا جواب بهینه دارد یا ناشدنی است.

(۳) یا ناشدنی است یا بی کران.

- ۴۴- یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، ماتریس پایه بهینه  $B = [a_1, a_2, a_3]$  و  $B^{-1}$  (وارون پایه) به صورت زیر هستند:

$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1, \dots, x_3 \geq 0$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر قید جدید به صورت  $4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_4$  به مسئله اضافه شود، به ازای چه مقادیری از  $b_4$ ، پایه همچنان بهینه می‌ماند؟

(۱)  $b_4 \geq 2$

(۲)  $b_4 \geq 16$

(۳)  $b_4 \leq 20$

(۴)  $b_4 \leq 12$

- ۴۵- برای روش سیمبلکس با متغیرهای کران‌دار، کدام مورد نادرست است؟

(۱) ماتریس‌های پایه ممکن است در دو افزار پایه‌ای شدنی متمایز، یکسان باشند.

(۲) در تباهیدگی ممکن است مقدار هیچ متغیر پایه‌ای صفر نباشد.

(۳) وقتی دو متغیر پایه‌ای هم‌زمان به کران‌هاشان می‌رسند، الگوریتم متوقف می‌شود.

(۴) در برخی از تکرارها ممکن است مقدار متغیر واردشونده پس از محورگیری کاهش یابد.

www.tahsilatetakmili.com